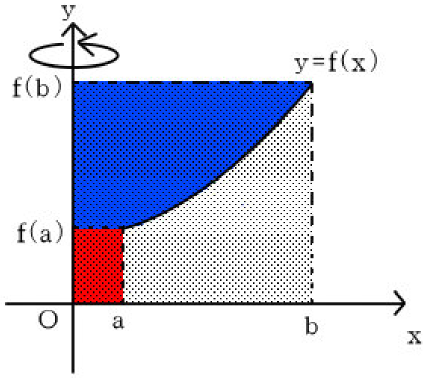
バウムクーヘン分割のもう少し厳密な証明

関数 $y=f(x)$ が閉区間 $[a,b]$ で単調増加しているとする。(ただし、$0 \leqq a < b$ である)
また、$y=f(x)$ は単調増大だから逆関数 $x=f^{-1}(y)$ をもつ。(このとき、$y=f(f^{-1}(y))$ に注意)
右図より求める体積は、網掛けの部分を y 軸で一回転させたものから、赤と青の部分を y 軸で一回転させたものを除いたものだから



$V=\pi\int_0^{f(b)} b^2\ dy-\pi\int_0^{f(a)} a^2\ dy-\pi\int_{f(a)}^{f(b)}\{f^{-1}(y)\}^2\ dy$
ここで $y=f(x)$ の両辺を x で微分すると
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x) \Leftrightarrow dy=f'(x)dx$
また、y と x の対応は下の表のようになる。

y	$0 \to f(b)$	$0 \to f(a)$	$f(a) \to f(b)$
x	$f^{-1}(0) \to b$	$f^{-1}(0) \to a$	$a \to b$

$\therefore V=\pi\int_{f^{-1}(0)}^{b} b^2 f'(x)\ dx-\pi\int_{f^{-1}(0)}^{a} a^2 f'(x)\ dx-\pi\int_a^b x^2 f'(x)\ dx$
ここで各項を部分積分によって変形すると

$$\begin{aligned}\int_{f^{-1}(0)}^{b} b^2 f'(x)\ dx &= [b^2 f(x)]_{f^{-1}(0)}^{b}-\int_{f^{-1}(0)}^{b} 0\cdot f(x)\ dx\\ &= b^2 f(b)-b^2 f(f^{-1}(0))=b^2 f(b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{f^{-1}(0)}^{a} a^2 f'(x)\ dx &= [a^2 f(x)]_{f^{-1}(0)}^{a}-\int_{f^{-1}(0)}^{a} 0\cdot f(x)\ dx\\ &= a^2 f(a)-a^2 f(f^{-1}(0))=a^2 f(a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_a^b x^2 f'(x)\ dx &= [x^2 f(x)]_a^b-\int_a^b 2xf(x)\ dx\\ &= b^2 f(b)-a^2 f(a)-\int_a^b 2xf(x)\ dx\end{aligned}$$

したがって、$V=\pi b^2 f(b)-\pi a^2 f(a)-\pi\{b^2 f(b)-a^2 f(a)-\int_a^b 2xf(x)\ dx\}=\int_a^b 2\pi xf(x)\ dx$
また、単調減少している場合も同様にすることで示すことができ、一般の関数の場合でも区間を単調増加している区間と単調減少している区間に分け、それぞれに上記の方法を適用し足し合わせることで、結局 $V=\int_a^b 2\pi xf(x)\,dx$ を得る。

この証明方法は、置換積分法と部分積分法を用いるものです。入試などでもまれですが、この証明をさせる問題があります (関数は $y=f(x)$ などの抽象的なものでなく具体的な初等関数であることが多い)
ですので余裕がある人はやり方をなんとなくでいいので覚えておいたり、関数を $y=\sin x$ などの具体的なものにして証明してみるとよいでしょう。